

「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」の解釈

－新学習指導要領とRME理論との比較を通して－

茨城県教育研修センター教科教育課 木村 了士

An Interpretation of ‘Mathematical Thinking’

and ‘Thinking, Judgment, and Expressiveness’

- Comparison between the New Course of Study and RME Theory-

KIMURA Satoshi

【要旨】

新学習指導要領の算数・数学科の目標では、数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力（「知識及び技能」、「思考力、判断力、表現力等」、「学びに向かう力、人間性等」）を育成することとしている。

本稿では、「数学的な考え方」を働かせ「思考力、判断力、表現力」を育成するということをどのように捉えればよいのか、オランダのフロイデンタール研究所で研究されているRME理論（the Realistic Mathematics Education Theory）の視点を手がかりとして、その解釈を考える。

1 はじめに

2020年度より小学校で新学習指導要領が完全実施となった。次年度以降の中学校、高等学校での実施もふまえ、学習指導要領の構造を整理して理解する必要があると考えた。新学習指導要領では、数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力（「知識及び技能」、「思考力、判断力、表現力等」、「学びに向かう力、人間性等」）を育成することとしている。今回の改定により、算数・数学科以外の各教科でも同様の構造が示された。

しかし、ここで難しいのは「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」という言葉の解釈である。「考え方を働かせることで、思考力を育成する」とはどういうことなのか。「考え方」と「思考力」は何が違うのか。「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」が縦軸と横軸のような構造になっていれば理解できるが、「数学的な考え方」「思考力、判断力、表現力」、いずれの文言の説明にも似たような言葉が並んでいる。本稿では、「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」の関係を整理する。また、児童生徒にそれらが身についたのかをどのように見取ればよいのかを考える。

そこで、RME理論の視点を手がかりにこの課題を考察する。まず、新学習指導要領における「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」についてまとめる。次に、オランダのフロイデンタール研究所において研究されているRME理論について紹介

する。最後に、新学習指導要領をRME理論の視点から考察することで、新学習指導要領における「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」という言葉の解釈を行い、具体例を示すことで「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」の関係を整理する。

2 「数学的な考え方」と「思考力、判断力」

新学習指導要領解説中学校数学編では、数学科の目標において「思考力、判断力、表現力等」について次のように示している。

数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。

(2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力、数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。

また、「数学的な考え方」について、次のように示している。

「数学的な考え方」は、「目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら、統合的・発展的に考えること」であると考えられる。以上のことから、「数学的な見方・考え方」は「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること」として整理することができる。

さらに答申を踏まえて言及し、「数学的な見方・考え方」を働かせることで3つの資質・能力が育まれること、それによって「数学的な見方・考え方」が更に豊かなものになるという相互の関係にあることや、ある領域で育まれた「数学的な見方・考え方」は数学の様々な領域や社会生活においても働かせることが可能な汎用性の高い能力であることが示されている。

3 RME理論

(1) RME理論とは

RME理論とはオランダにあるフロイデンタール研究所が提起している the Realistic Mathematics Education Theory (真実的数学教育) のことである。RME理論は「活動としての数学」を重視する理論である。ここではまず、現実の事象を数学化する「現実の数学化」が行われる。次に、その結果得られた数学的経験を数学的方法によって数学化する「数学の数学化」が行われる。「数学の数学化」は、まず局所的に行われ、徐々に大局的に整理されていく。大局的整理の事例としては、ユークリッド幾何学等が挙げられる。RME理論においては、数学は現象を整理するための手段という側面をもつとされ、一連の「数学化」が教授目的とされる。

以下RME理論について、池田(2013)の文献を参考にキーワードを整理し、その

内容を紹介する。

キーワード

- (1) 活動としての数学, 「水平方向の数学化」, 「垂直方向の数学化」
- (2) 「導かれた再発明」
- (3) 再発明の考えでは, 文脈のある問題が重要である。
- (4) インフォーマルな知識とフォーマルな知識との間を「model-of」と「model-for」で橋渡しをする。

「活動としての数学」とは, 数学者が作った完成された数学を教授する指導ではなく, 実生活の問題や数学の問題の文脈から徐々に数学を作り上げていくような指導過程を大切にするものである。これは, 「数学化」に焦点をおくものであり, 「数学化」は「水平方向の数学化 (生活から記号)」と「垂直方向の数学化 (記号を数学的に再構築)」に分かれる。

「導かれた再発明」とは, 学習者が指導者に支援されながら, 徐々に知識を構成していくものである。ここでは指導者の導きのもと, 学習過程の不連続な部分を学習者が自己の活動を反省することで飛躍する。そして, それによって一連の「数学化」を実現するものである。

再発明を促進するためには, 古人が数学を発明した過程と同じような過程を学習者が経験できるような問題状況が必用である。

「model-of」はある特定の場面におけるモデルのことである。この適用場面を広げ複数の場面のモデルを検討することで得られるより洗練された数学的推論に対するモデルを「model-for」と呼ぶ。「model-of」から「model-for」への移行はRME理論の核になる考えである。

(2) RME理論における自己発達モデル

RME理論においては, 前述の2つのモデル (Model-of, Model-for) を自己発達のモデルと呼ぶ。この自己発達モデルについて, 森本, 磯田 (2003) の考察を抜粋して, 以下に引用する。

再発明の原理に従えば, 真実的数学教育では, ボトムアップ型の活動が追及される。ボトムアップとは, 子どもたちが, 自分で状況に対するモデルを作り, そのモデルを形式的な数学的知識を発展させていく基として使うというものである。このボトムアップの考えは, 次のような流れで表すことができる。

最初に文章題での特別な状況が与えられる。その後モデルが状況下で一般化され, 状況に関係なく, それだけで存在するものになっていく。その結果, 新たな状況下でも, そのモデルは形式的な数学の理由付けをするためのモデルとしてはたらくことができるようになる。

真実的数学教育において, モデルを子どもが使うにしろ, 数学史上でのモデル

の使われ方をみるにしろ、モデルは、最初は非形式的な表現や考え方の中から生じている。そこで、真実的数学教育では、モデルによって、4つの level に分けることができる。(図1参照)

最初の level では、子どもが考えていることは、実際の生活と関係ある。この中で、子どもは、状況にあった知識や方略を持ち込み、この状況下で応用してみる。

第2の level では、与えられた状況での問題を解くために、子どもは、状況を表すモデルを作る。その中で、第1の level で考えていた知識や方略を書いたものとして表せるようになる。しかしながら、この level のモデルは状況に依存している(状況のモデル Model-of)

第3の level では、数学的視点から方略の方へ焦点を当てる。そして、これによって、ある数学的知識のためのモデルとなる。また、この level で、子どもは、モデルを最初の状況に依存しない表現として考えることができるようになる。

第4の level では、形式的な数学的知識を獲得しているのである。

ただし、ここに示している level は、局所的な level であることを注意しておく。つまり、ここに示している level は、特別な話題、基本的な事実、2数の加法や減法、書かれている演算方法、分数などの子どもの理解に依存している。また、この level は、ある意味、絶対的なものではない。つまり、異なる level が、分離されているというものではない。この考え方は、子どもは、より低い level に戻ることができるというものである。つまり、低い level は、高い level に組み込まれなければならない。

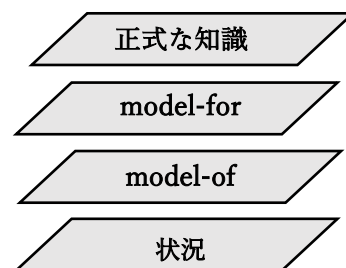


図1

4 RME理論の視点からの考察

(1) RME理論と新学習指導要領の類似性

① 活動としての数学

新学習指導要領では、数学的活動を通して3つの資質・能力を育成するとしている。これは、「知識や概念は外側から教え込むものではなく、活動を通して、学習者の内面に構成されていくということである」という理念を表していると考える。Frudenthalも「活動としての数学」と、その活動により得られる結果を意味する「既成の所産としての数学」とを対比し、「活動としての数学」をこそ重視している。

(伊藤, 2007) 図2にあるように, 新学習指導要領においても活動の結果として得られた知識や概念からさらに次の活動へつながる学習過程 (D1, D2, A1, A2) を通して, 学習者は徐々に純粋な数学に近づいていく。これは, RME理論における「導かれた再発明」であり, 正に「活動としての数学」に当たると考える。

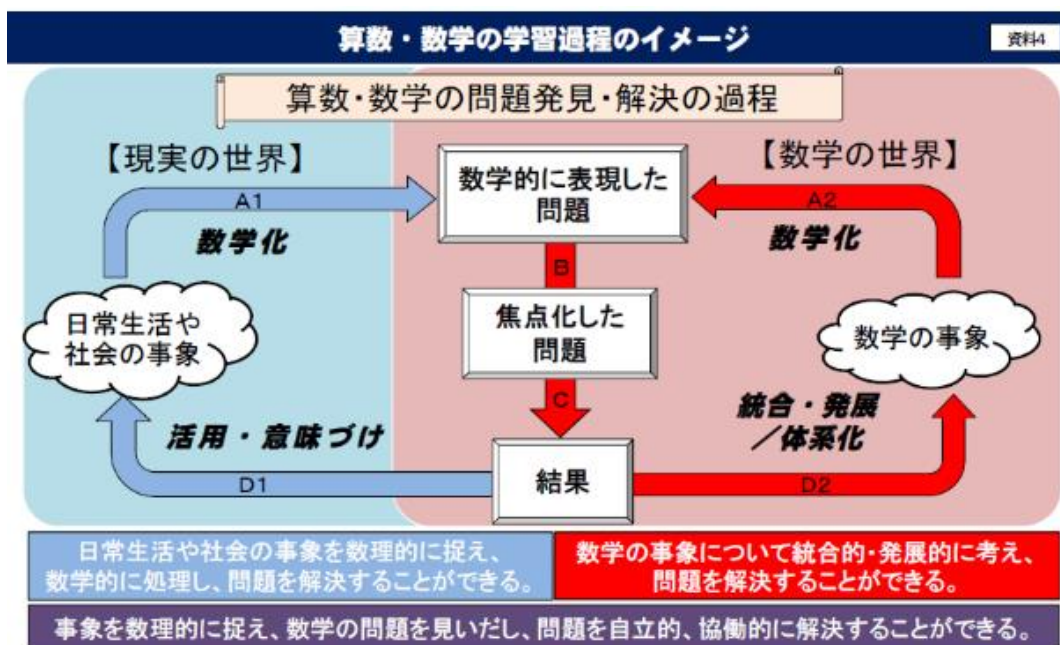


図2 算数・数学の学習過程のイメージ

② 2つの数学化

新学習指導要領では, 「日常事象の数学化」, 「数学の事象の数学化」2つの数学化を示している。RME理論でも同様に2つの数学化を示し, それらを「水平方向の数学化」, 「垂直方向の数学化」と呼んでいる。Fruedenthal は, まず「現実の数学化」を学ぶべきとし, 可能であればさらに「数学の数学化」をも学ぶべきとし, 一連の「数学化」を教授目的とした。(伊藤, 2009) この考えは, 小学校から高等学校にかけて, 発達段階に応じて2つの数学化過程を取り扱うことにも似ている。小学校段階では, 「日常事象の数学化」を中心に取扱い, 中学校から高等学校にかけて「数学の事象の数学化」に漸進的に進んでいくことに似ている。

③ 入れ子構造

「数学的な考え方」と「思考力, 判断力, 表現力」は入れ子構造になっていると捉える。RME理論の自己発達モデルにおいて「model-of」が「model-for」に発達したり, 低いレベルに戻ったりすることと同様である。ある段階で「思考力, 判断力, 表現力」の水準であったものが「数学的な考え方」の水準に高まったり, 身についた「数学的な考え方」を具体の水準に適用すると, それが「思考力, 判断力, 表現力」と呼ばれるものになったり, 両者とも緩やかに区切られた入れ子のように

なっていると考える。

(2) 「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」の解釈

問題を分かりやすくするために、「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力等」に示されている文言を、煩雑ではあるが以下に併記する。

目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら、統合的・発展的に考えること（数学的な考え方）

数学を活用して事象を論理的に考察する力、数量や図形などの性質を見だし統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。（思考力、判断力、表現力等）

2つの文言を見比べると、活用、論理的、統合的・発展的、考える、考察といった言葉が並んでおり、一見同じような内容のように見える。これらの違いについて以下考察を述べる。

なお、「モデル」という言葉を使用して考察を述べるが、モデルの定義として多くの研究者の用いる Pinker(1981)の定義を用いる。

系Mが系Oのある目的についてのモデルであるとは、
「Mが目的に対しOの代わりとなる。Mを研究することがOに対して意味ある結果をもたらす。」

「思考力、判断力、表現力」については、「事象を考察する力」という表現がある。学習者は、事象を観察し、理想化、単純化するなどして、既習のモデルに当てはめて問題解決を行う。この水準における考察の対象は事象である。

例えば、鶴亀算に取り組む際に、方程式を学習していない学習者は図や表など問題解決のためのモデル (Model-of) を作成する。モデルは学習者によって異なるとされる。モデルは事象に依存するため、この段階では特殊なモデルであり、汎用性はない。図や表で表現するなど、数学を活用して論理的、統合的・発展的に考察できればよい。また、思考は図3のプロセスで進むと考えられる。

「数学的な考え方」では、「目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用して…論理的、統合的・発展的に考える」という表現がある。この段階では、「目的に応じて」であるため、よりよいモデル (Model-for) を選択するために考察の対象が事象だけではなくモデルにも及ぶと考える。

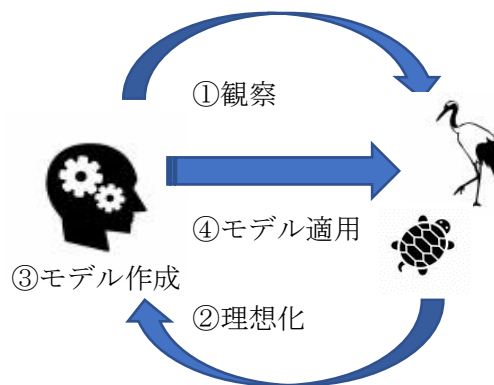


図3 思考力、判断力、表現力
Mode-of

鶴亀算の例で考えれば、モデルを適用する前段階で、モデルの比較検討が行われる。(図4)この段階で学習者は事象のみならず、よりよいモデルを考察することになる。よりよいモデルとは、より汎用性のある数学的に洗練されたモデルという意味である。鶴亀算で言えば、図による解法より方程式の方がよいということになるであろう。この段階に至れば、「思考力、判断力、表現力」の水準から「数学的な考え方」の水準になると考えられる。

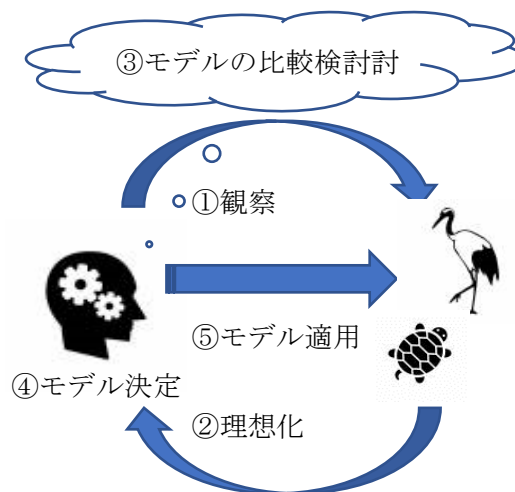


図4 数学的な考え方
Model-for

このように、考察の対象が事象からモデルに変わることによって、モデルは正式な知識のためのモデル (Model-for) になり得る。このように、「思考力、判断力、表現力」から「数学的な考え方」への進化は、Model-of から Model-for への進化と同様の構造をもっていると考えることができる。

(3) 具体例

「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」は論理的、統合的・発展的という点では同じであるが、考察の対象と思考のプロセスに違いがある。学習者に「思考力、判断力、表現力」が育成されたのか評価するためには、何らかのモデルを活用して問題解決を行っているかどうか(多様な考え等は、基準に関わる)を見取ればよい。

「数学的な考え方」が鍛えられたかどうかを評価(指導に生かす)するためには、複数のモデル(表1, O1におけるM1~M4)や複数の場面におけるモデル(表1, O1, O2におけるM1~M4)を比較検討することで、よりよいモデルを選択したり、モデルを洗練したりしているかを見取ればよいと考える

以下、鶴亀算の問題解決過程を例に具体的に考える。学習者はまず、事象O1の文章を読み、素朴な図M1を考える。これはやや抽象化されて○や△といった記号で

	<p>O1 : 鶴亀算 鶴と亀が合わせて10いて、足の数の合計は28です。鶴は何羽いますか。</p>	<p>O2 : 絹盗人算 盗人が反物を盗んできた。8反ずつ分けると7反足りず、七反ずつ分けると8反あまる。盗人は何人いて、何反盗んだか。</p>
M1	<p>合わせて10で、足は28</p>	<p>⑧, ⑧…⑧, ① ⑦, ⑦…⑦, ⑦, ⑧ 総数は同じだから…</p>

M2	<table border="1"> <tr><td>鶴</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td><td>...</td><td>6</td></tr> <tr><td>亀</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>4</td></tr> <tr><td>足</td><td>20</td><td>22</td><td>24</td><td>...</td><td>28</td></tr> </table>	鶴	10	9	8	...	6	亀	0	1	2	...	4	足	20	22	24	...	28	<table border="1"> <tr><td>⑧</td><td>8</td><td>8</td><td></td><td>8</td><td>1</td><td>不足7</td></tr> <tr><td>⑦</td><td>7</td><td>7</td><td></td><td>7</td><td>7</td><td>余8</td></tr> <tr><td>差</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>全体差15</td></tr> </table>	⑧	8	8		8	1	不足7	⑦	7	7		7	7	余8	差	1	1		1	1	全体差15
	鶴	10	9	8	...	6																																			
	亀	0	1	2	...	4																																			
足	20	22	24	...	28																																				
⑧	8	8		8	1	不足7																																			
⑦	7	7		7	7	余8																																			
差	1	1		1	1	全体差15																																			
M3																																									
M4	$4(10 - x) + 2x = 28$	$8x - 7 = 7x + 8$																																							

表 1

表現されるかもしれない。次に、M1の規則性を考察することで、M2のような表を作ることが考えられる。M1, 2の水準では、モデルとして汎用性が低く、まだModel-ofの段階であると考えられる。この水準においては、あくまでも事象を考察することが目的であるため、ここで働いているのは「思考力、判断力、表現力」であると考えられる。次の水準では、M3のような図を考えるかもしれない。この図は、文脈が変わっても使用可能であるという意味でより汎用性の高いものである。(合わせて10が20に変わっても、足の数が2本と3本に変わっても使用可能である。)また、正式な知識(方程式による解法)にも関連付けしやすい図となっており、Model-forと言えらる。しかし、M3やM4を考えたからといって、「数学的な考え方」が働いているというのはまだ早い。これはまだ、数学的な表現を用いて表現できたということであり、「思考力、判断力、表現力」の水準である。複数のモデルM1～4を比較し、数値が変わっても(合わせて10でも)使用可能なモデルを考えたり、複数の場面で(O1でもO2でも)使用可能なモデルを考えたりするなど、モデルそのものを考察対象として、より汎用性の高い、数学的に洗練されたものにしよと考えるようになった時に「数学的な考え方」が働いているのだと考える。

5 まとめと今後の課題

本研究の目的は、新学習指導要領における「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」の違いを、RME理論の視点を手がかりに、どう解釈するべきか考えることであつた。そのために、学習指導要領の枠組みとRME理論の概略を対比し、その類似性を論じてきた。その結果、「活動としての数学」や「2つの数学化」、「入れ子構造」など

の類似性を確認することができた。

特に「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」の関係は、Model-of と Model-for の関係と類似の構造であると捉えることで、解釈することができた。「数学的な考え方」と「思考力、判断力、表現力」の違いは、「考察対象の違い」、「思考プロセスの違い」、「汎用性や抽象性の水準の違い」である。そして、「思考力、判断力、表現力」は「数学的な考え方」に包摂されるが、その境界は厳密に区切られたものではなく、その水準の変化は双方向的なものだということである。

これまでに論じてきたことをまとめたのが、図5である。Model-of の水準で事象を考察する際には「思考力、判断力、表現力」が働いている。モデルはM1～3へと徐々に発達していく。そして、正式な数学(方程式)のモデルM4への飛躍の足場となるのが、M3という構造である。M3からM4への飛躍のためには、「目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら、統合的・発展的に考える(数学的な考え方)」ことが必用になる。数、式、表、グラフ等とはM1やM2のことであり、問題解決の過程を振り返るとは、Model-for の水準までの活動全体を振り返ることである。これらの学習過程において「思考力、判断力、表現力」は「数学的な考え方」へと高まっていく。そしてこの水準の変化は一方向的なものではなく、双方向的なものである。

したがって、学習者が「思考、判断、表現」しているのか「数学的に考え」ているのか安易に評価することはできないが、学習者が図5のどの水準にいるのかを観察することで、ある程度見取ることができると考える。

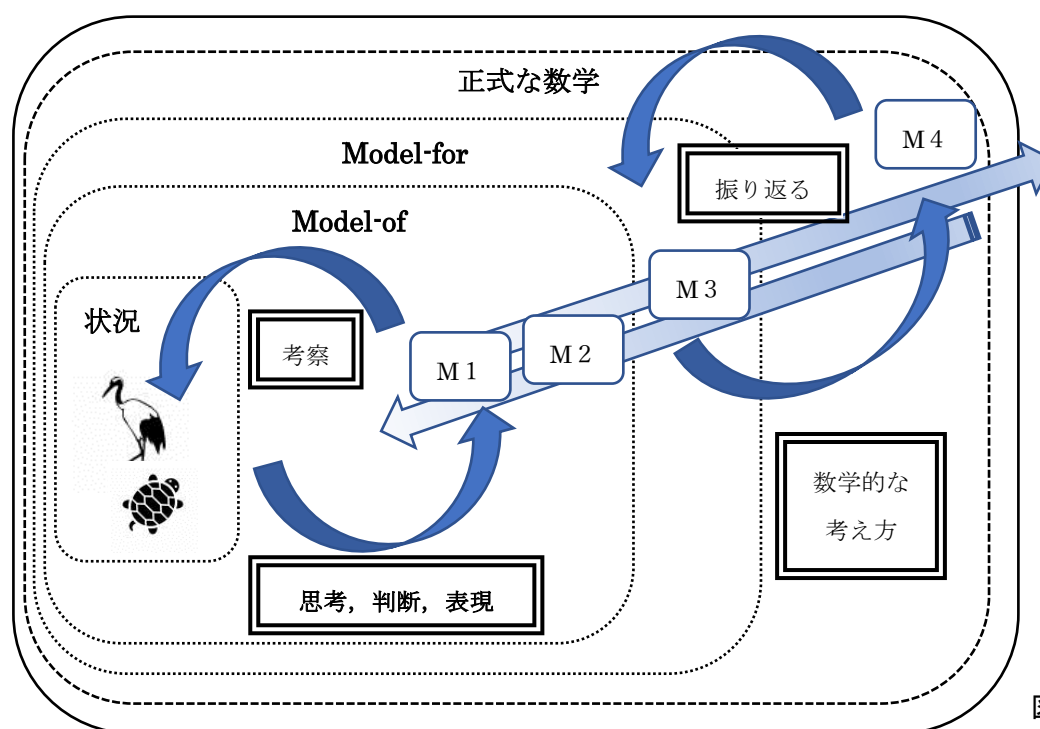


図5

今後は、数学的活動についてもRME理論の視点から考察することも考えられる。図2「算数・数学の学習過程のイメージ」と図5を組み合わせることで、3次元のイメージ図に整理すれば、さらに構造を視覚化できるのではないだろうか。

また、モデルの発達を促す指導の在り方等についても研究を深めていきたい。M1～3の水準の高低を決定する要因を探ることで、この課題に迫ることができると考える。汎用性、抽象性といった要因があると考えられるが、他の要因についても探っていきたい。

さらに、全国学力・学習状況調査やPISA調査とRME理論、その他の理論の関係を探ってみたい。最近の動向を見ると、RME理論における水平方向の数学化が強調され、垂直方向の数学化の取扱いが少ないように感じられるためである。

最後に、本稿を執筆するにあたりRME理論という視点を示唆していただいた山梨大学大学院准教授清水宏幸氏に感謝を申し上げたい。

【参考文献】

- ・池田敏和 (2013) 「モデルに焦点を当てた数学的活動に関する研究の世界的傾向とそれらの関連性」, 『日本数学教育学会誌』第95巻, 第5号, pp.2-12
- ・伊藤伸也 (2008) 「数学学習を難しくしているのは何か, そしてそれはどのように克服しうるのか」, 『数学教育5月号』, 明治図書, pp.98-102
- ・伊藤伸也 (2008) 「『導かれた追発明』をいかに実現しうるのかー『創発的モデル化』に着目した『局所的教授理論』の開発ー」, 『数学教育6月号』, 明治図書, pp.98-102
- ・佐藤一 (2018) 「RME理論の日本の数学教育への導入についての考察: 導入に際しての可能性と問題点」, 『教科開発学論集』, 愛知教育大学大学院教育学研究科・静岡大学大学院教育学研究科共同教科開発学専攻, pp.89-103
- ・平岡賢治, 野本純一 (2015) 「数学の教科書をより有効に使う力の育成に関する研究(2)ーRME理論を手がかりにしてー」, 『長崎大学教育学部紀要』, 1, pp.87-98

【引用文献】

- ・伊藤伸也 (2007) 「H. フロイデンタールの数学観とその背景」, 『筑波数学教育研究』26, pp.47-56
- ・伊藤伸也 (2009) OECD-PISA の「数学的リテラシー」評価枠組みの背景ーH. フロイデンタールの数学教授論との関わりからー」, 『科学教育研究』Vol.33, No.4, pp.321-329
- ・森本貴彦, 磯田正美 (2003) 「真実的数学教育論に見るモデル論」, 『数学教育1月号』, 明治図書, pp.104-107
- ・文部科学省「中学校学習指導要領解説数学編」
- ・Pinker,A (1981) The concept 'model' and its potential role in mathematics education, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 12, pp.693-707