

数学的な表現力を育てる学習指導の在り方

－中学校第2学年「一次関数」における数学的活動を通して－

水戸市立国田義務教育学校 森島 義範

I 研究の意図と方法

1 研究の意図

身の回りには、関数関係で考えることのできる事象が多く存在している。その関係を関数としてとらえることができれば、2つの数量の変化や対応の様子から現状を把握したり、将来を予測したりすることが可能になる。そのためにもその事象を表、式、グラフを用いて数学的に表現することは、その事象の関係をとらえていく上で大切なことであると考えられる。

図1は、平成21年度全国学力・学習状況調査[数学B]③の問題である。図2は、③の(3)で出題された「蛍光灯と白熱電球の総費用が等しくなる時間の求め方を説明する問題」の本校と全国の結果を比較したものである。正答率がともに約*%と低い。また無答率が約*%で、生徒のほぼ半数が求め方を言葉で表現し、説明できていないことが分かる。

これまでの授業を振り返ってみると、表、式、グラフで表すことの学習に重点を置きすぎ、表、式、グラフから見えてくる関数の特徴などを言葉で表したり、説明したりする活動を十分に行っていなかったことに問題を感じる。

改訂中学校学習指導要領¹⁾の数学科の目標には「…数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察し表現する能力を高める…」と「表現する能力」という文言が加わり、自ら考えたことを表現する能力の育成が求められている。(下線筆者)

以上のように、全国学力・学習状況調査結果や改訂学習指導要領の数学科の目標をみていくと数学的な表現力を育てていくことがこれからの数学教育における課題の1つであることが分かる。数学的な表現力の育成が強調されている現状を踏まえ、本研究では数学的な表現力の育成に重点を置き研究を進めていくこととした。また、平成21年度全国学力・学習状況調査結果の「数量関係」の領域における課題として「事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的な表現を用いて説明すること」²⁾と明記されていることから、関数の学習における数学的な表現力の育成は早急に取り組まなければならない課題であることが分かる。

数学的な表現力を育てるには、数理的な事象に対する自分の考えを自分にとっても他者にとってもわかりやすく表現したり、説明したりすることが大切であると考えられる。そのためには

3) 美咲さんは、家の白熱電球が切れたので、環境にやさしいといわれている電球型蛍光灯(以下、「蛍光灯」とします。)にかえようと考えています。蛍光灯について調べたところ、次のことが分かりました。

蛍光灯と白熱電球の値段(はかりの重さも同じ)		
	蛍光灯(70W形)	白熱電球(75W形)
1個の値段	1000円	100円
電球が1000時間燃やしたときの総費用	200円	1000円
1個の寿命	10000時間	1000時間

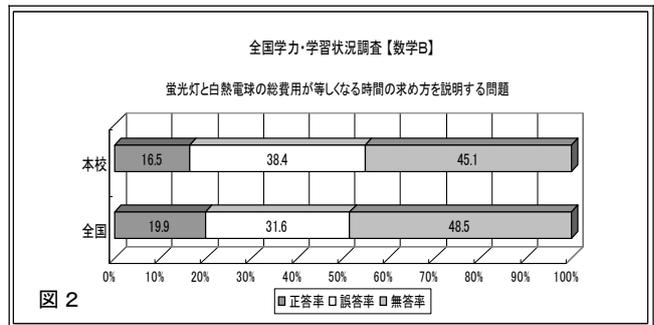
美咲さんは、蛍光灯と白熱電球について、電球代は使用時間にもよって一定の割合で増えるとして、1個の値段と電球代を合計した総費用を比べてみようと思いました。

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) 白熱電球を1000時間使用したときの総費用を求めなさい。

(2) 美咲さんは、蛍光灯をx時間使用したときの総費用をy円として、xとyの関係を、右のよりにグラフに表しました。

図1



自分の考えを記述する方法を身に付けるとともに、数学的な表現を用いて多様に表現したりいくつかの表現したものを関連付けて考察したり、他者に説明したりする数学的活動を授業の中に取り入れることが有効であると考えます。

2 研究の方法

- (1) 数学的な表現力についての理論を研究する。
- (2) 関数における数学的な表現力を育てるために、自分の考えを多様に表現し、他者に分かりやすく説明する数学的活動について研究する。

II 研究の概要

1 基本的な考え方

(1) 数学的な表現力

①「表現する」ということ

「表現する」ということについて、次の3つの視点から述べる。

第1に、なぜ「表現する」のか、である。私たちは物事を考えるとき、頭の中で物事がどういうことなのかをイメージしたり自分の考えを整理したりする。自分の考えを整理したり、理解を深めたり、他者に理解してもらうためには、自分の考えやイメージを頭の中から外に出し、目に見えるものにする必要がある。この目に見えるものにする行為が「表現する」ということである。つまり、自分の考えを整理し、自他共に理解を深めるために「表現する」のだと考える。

第2に、どのように表現するのか、である。まずは形式にとらわれず、図や絵言葉など具体的な表現を用いて自分なりに表現することが大切であろう。佐伯胖は「表現というのは、ことばによる表現という意味ではなく、言われていること、あるいは学ぼうとすることが、一体どういうことなのかということを描でもよいし、イメージでもよい、何でもよいが何らかの『形』にして示してみることです。これが一つの力になると思います。」と述べている。³⁾しかし、自分なりに表現するだけでは限界がある。そこで他者が表現したものと比較検討することを通して多様な表現方法があることを知り、専門的な用語や記号、式などを用いた、より抽象的な表現を身に付けていくことが大切であると考えます。

第3に、「表現する」ことでどのようなメリットがあるのか、である。まず、「表現する」ことによって目に見えないものが見えるものになるので、自分自身との対話が容易になり、思考過程を振り返ることで自分の考えの根拠を明確にすることができるということがあげられる。次に、表現した他者の考えを見たり読んだりすることが容易になり、他者との交流を通して他者の考えのよさに触れることができ、そのよさを生かして自分の考えを質的に高めることができるということがあげられる。そして、自分の考えと対話したり、他者と交流したりすることで自分の行為を振り返ることができるので自己評価ができるということも考えられる。さらに、表現することにより自分の考えが記録できるということもあげられる。考えを記録することで将来の自分に今の自分の考えを伝達することができる。ノートが既習事項の振り返りに役立つのは、自分の考えや学習の成果がノートに記録されているからであると考えます。

② 数学的な表現力

「数学的な表現」とは、対象となるものを図、表、式、グラフや記号、用語などの数学特有の言語で表したものである。これは数学的に表現する上での万国共通の言語となる。数学的な表現力は、単に図、表、式、グラフなどの表現形式を学んだだけでは身に付くものではなく、数学的な表現を探究の手立てとして活用したり、数学的な表現を使って自分の考えを相手に伝えたり、数学的な表現で表されたものを読み取ったりして、自他の考えを理解しようとする中で身に付くものと考え。このことを踏まえ、筆者は広義の意味での数学的な表現力を「数学的に表現したものにより自他の理解を深められる力」と考える。

木本新一郎は、数学的な表現力を次の3つの力でとらえている。

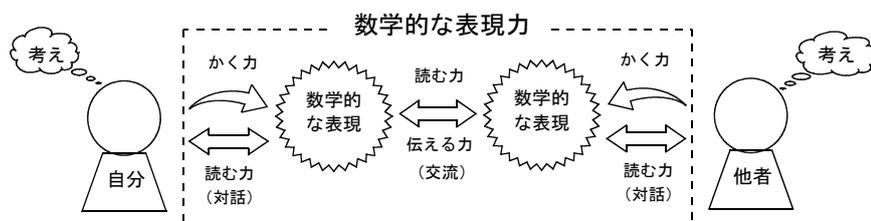
- i) かく力 ii) 読む力 iii) 伝える力

ここでいう「かく力」とは、数学の言語となる図、表、式、グラフ、記号、用語など数学的な表現を用いて、場面に応じ適切に表す力と考える。

「読む力」とは、自分の考えを振り返ったり他者との交流を図ったりするために、数学的に表現したものを読み、その考えがどういうことなのかを理解する力と考える。

「伝える力」とは、自分の考えを他者に理解してもらおうと、分かりやすく説明する力と考える。相手に理解してもらうためには、伝える相手の能力に応じた数学的な表現を用いることも考慮する必要があるだろう。

習得した数学的な表現を利用し、自分の考えを表現することは、「かく力」が向上するとともに、習得した数学的な表現を振り返る機会となり、更なる定着を促すことになる。また、自分の考えを振り返ったり、他者と考えを交流させ他者の考えを理解しようしたり、自分の考えをわかりやすく説明したりすることで「読む力」や「伝える力」が高まるものと考え。つまり、数学的な表現力を育てていくためには、この3つの力を関連付けることが必要である。本研究では、この3つの力を総合させた力を数学的な表現力ととらえることにする。



③ 数学的に表現することのよさ

「数学のよさ」について現行中学校学習指導要領(平成10年12月)解説—数学編—では、「数学を学ぶ過程で、数学的な見方や考え方によって能率的に処理できるようになった、簡潔に表現できるようになった、事柄がすっきり分かるようになったということを振り返り、よさを味わわせていくことが大切である。」と述べている。⁴⁾ また改訂中学校学習指導要領解説数学編(平成20年3月)では、「数学を学ぶ過程で、数学的な知識及び技能、数学的な見方や考え方などを用いることによって能率的に処理できるようになったり、簡潔かつ明瞭に表現できるようになったり、事柄を的確にとらえることができるようになったりしたことを、その過程を振り返るなどして明確に意識できるようにすることが大切である。」と述べている。⁵⁾ 文末が「味わう」から「明確に意識できる」というように変わったことから、「数学のよさ」を実感させることが強調されていることが分かる。(下線筆者)

秋田喜代美は、表現活動の重要な働きとして次のように述べている。⁷⁾

- ・身に付けた知識を活用する行為であり、思考を外に出すことで断片的であった知識をつなぎ組み立てる契機となる。
 - ・集団で学ぶ場では、仲間に向けて表現したり、表現を仲間と鑑賞しあうことで、それぞれの違ったよさが現れ対話し学びを深める契機とできる。また、同じ疑問をもったり共感しあうことも生まれ、探究への連帯意識も生まれる。
 - ・自分の理解や認識を教師や仲間知ってもらったり、助言をもらえるよい機会になる。
- 前述した「表現することのメリット」、「数学的な表現力」、「数学のよさ」、「表現活動の働き」の4点を踏まえ、数学的に表現することのよさを次のようにとらえたい。

- 数学的な表現を数学の言語として用いることで、自分の考えを簡潔、明瞭、的確に表現できるとともに、表現したものの記録(ノート等)をもとに振り返りができる。
- 表現したものと自分自身が対話することにより、自分の考えが整理され、理解が深まるとともに、新たな考えを生んだり、自分の見方や考え方を広げる機会となる。
- 他者の表現を見たり、聞いたり、読んだりすることで、他者との交流が容易になり自分の考えの根拠がより明確になったり、他者の考えのよさに触れることができたりと、互いの考えを質的に高めることができる。

④関数における数学的な表現力

関数における数学的な表現としては、表、式、グラフの3つが代表的にあげられる。関数は方程式や図形とは異なり、目に見えない所に難しさがある。日常の事象の中にある2つの数量の関係を表、式、グラフで表現し、数学的にモデル化する理由は、その事象の変化や対応の様子をとらえやすくし、どんな関数なのかを簡潔に判断するためである。つまり、関数の特徴をつかみ、理解を深めるための手立てとして表、式、グラフを用いているといえる。特に、式で表すことが重要視されているのは、式の形からどんな関数なのかを容易に判断できたり、知りたい x や y の値が計算によって簡単に求まり、ある事象における将来の状況を予測したりする際に便利だからである。

通常、身の回りにある事象を考察する際は2つの数量を取り出し、その関係を表、式、グラフで表現することで、その事象の変化と対応の特徴をとらえていく。その際に、表、式、グラフには表現上の長所と短所があることを踏まえ、1つの表現だけではなく、3つを互いに関連付けて取り扱うことが大切である。

表、式、グラフを互いに関連付けることで、互いの長所を生かし短所を補い合うことができるので関数の特徴がつかみやすくなり、関数についての理解が深まっていくものと考ええる。また、「～は～の関数である」などのように言葉や数学的な用語を用いて関数の特徴を表現することも、関数における数学的な表現に入るものと考ええる。

次に、関数における数学的な表現力について、前述した i) かく力、ii) 読む力、iii) 伝える力 を具体的に述べる。

i) かく力

- ・2つの数量関係を表、式、グラフでかく力(表す力)
- ・「○は□の関数である」など、関数関係や特徴を言葉でかく力 など

ii) 読む力

- ・表、式、グラフから2つの数量の対応や変化の様子を読む力(解釈する力)
- ・表、式、グラフと事象とを関連付けて読む力(解釈する力)
- ・他者が表現した表、式、グラフを読む力(解釈する力) など

iii) 伝える力

- ・表、式、グラフから読み取ったこと(事実)を言葉で伝える力(説明する力)
- ・表、式、グラフをどのように用いて問題を解決していくか、その手順や方法を言葉で伝える力(説明する力)
- ・表、式、グラフを用いて根拠を明確にし、ある事柄が成り立つ理由を言葉で伝える力(説明する力) など

関数における数学的な表現力を高めるためには、上述した3つの力を磨くことのできる学習の場を設定することである。特に「かく力」が身に付いていないと、数学的に表現したものがないということで、自分との対話や他者との交流が不可能になり「読む力」「伝える力」を高めることができない。関数における「かく力」を育てるためには、なぜそのような表、式、グラフになるのか、根拠を明確にしながら取り組ませるようにする。例えば、一次関数のグラフ上にある点を変化の割合をもとに移動させる活動を通して、一次関数のグラフが直線になることを変化の割合が一定であることと関連付けて理解していく。

そして「読む力」「伝える力」を高めるためには、表、式、グラフなど多様な方法で数学的に表現したものと事象を関連付けて考察したり、説明したりする数学的活動を授業の中に取り入れ、生徒が数学的に表現することのよさや有用性を実感できるように工夫することが大切であると考えられる。

(2) 関連付けて考察し、説明する数学的活動

私たちは新たな問題を解決するとき、今までに学習したことをもとに解決しようとする。また、自分や他者が見いだした多様な考えを結び付けて理解を深めようとしている。このように既習事項と関連付けたり、多様な考えを互いに関連付けたりなど、「関連付ける」ということは「理解を深める」という意味で重要な役割を果たしている。

数学的活動について、改訂中学校学習指導要領解説数学編では「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学に関わる様々な営み」と述べている。⁷⁾「目的意識をもって」とあることから、実験や観察、操作などの単なる活動で終わるのではなく、それらの活動によって生み出された事実を数学を使って考察する活動を大切にしたい。特に次の3つの活動を重要視している。

ア 数や図形の性質などを見いだす活動

イ 数学を利用する活動

ウ 数学的に説明し伝え合う活動

生徒に数学を指導していく中で、学習内容を「理解してほしい」と願うのは当然のことである。さらに「なんとなく理解した」「とりあえず理解した」ではなく、「実感を伴って理解した」「心に響いて理解した」という心に衝撃的に残る満足感のある理解を実現し、数学を学ぶ楽しさや喜びに結び付けたいと考える。そのためには、実験や観察、操作などの活動から性質やきまりを見いだしたり、見いだしたことを利用したり、振り返って考えたり、自分の考えを他者に分かりやすく説明したりする活動、つまり上記のア、イ、ウのような数学

的活動が日々の学習の中に必要である。根本博は広義の意味で数学的活動を「身の回りに起こる事象や出来事を数理的に考察する活動」とし「問題解決過程での活動を考えてみると、物や道具を用いたり、身体を動かしたりして考える*physical*な側面と、頭の中で考える*mental*な側面があることに気付く」と述べ、次のように整理している。⁸⁾

- ア) 計算処理や図形の具体的な操作など客観的に観察が可能な活動 (外的行為)
- イ) 類推したり、振り返って考えたりするなどの内面的な活動 (内的行為)

さらに「外的行為は、内的行為の活性化を促すものと位置付けることができる。また、内的行為は外的行為を誘発する。知的充足の高まりは、ア)及びイ)の相互的かつサイクリックな活動に依存する」と述べている。

図3は「多様な表現を関連付けて考察し、説明する数学的活動」について、線香が燃えるという事象を一次関数としてとらえる学習を例にしたものである。生徒は実際に線香を燃やし、時間と燃え残った線香の長さのデータをとる。2つの数量を表、式、グラフで表現することで対応や変化の様子が分かり、見えなかった関数関係が見えてくる。そして表、式、グラフを互いに関連付けて考察することで関数の特徴を見だし、問題の解決に利用する。この過程の中で自分の考えと対話したり、他者と考えを交流したりして、自らの考えを整理し、自分の考えの質を高めていく。このような外的行為と内的行為の繰り返し(サイクリックな活動)により知的な充足度が高まり、実感を伴った理解に結び付くものと考えられる。

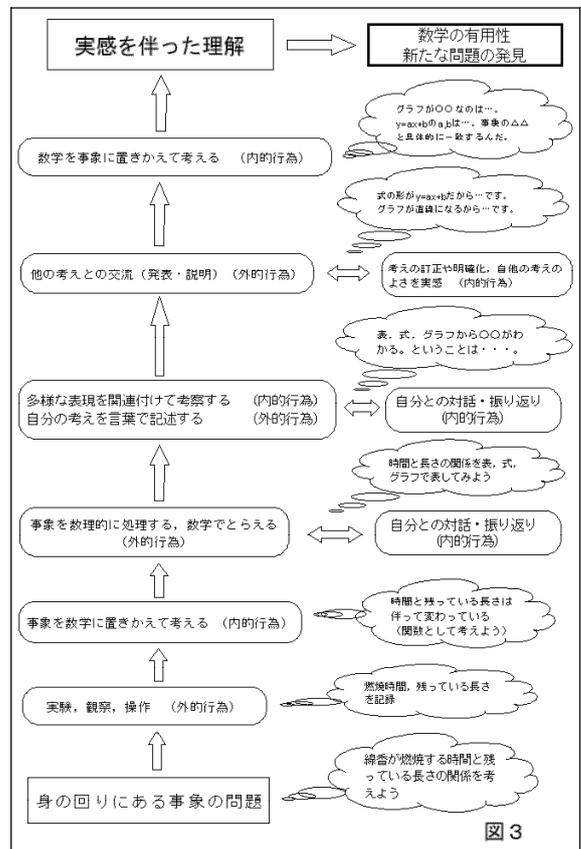


図3

2 数学的な表現力を育てるための方策

(1) 記述の方法を身に付けるための活動の充実

① 「事実」を記述する活動 ~ 分かっていることを明確にする ~

実験や観察、操作などの数学的活動によって関係やきまりを見いだすことは、授業の中でよく行われている。その際に、見いだした関係やきまりを的確にとらえ直し、数学的に正しく表現する活動を大切に扱っていきたい。例えば、表を横に見ることによって燃えた線香の長さの変化のきまりが分かった場合は、「燃えた線香の長さは、1分間につき5mmと一定である」と表したり、線香を燃やす実験から燃やした時間と残っている長さの関係が伴って変わる2つの数量であることが分かった場合は、その関係を「残っている長さは燃やした時間の関数である」と表したりするなど、活動によって見いだされた事実を記述するようにする。ただ、「○は□の関数である」という表現は数学特有のものなので、生徒が理解しがたい部分である。「□が決まるとそれに伴って○がただ1つ決まる」という状況が判断できたときは、このような表現をするということをていねいに指導したい。

「事実」を記述する場合は、数学の用語を用いて「~は...である」という形で表現する

ことを意識させたい。そうすることで見いだした事実を簡潔に説明することができるようになる。授業では当たり前のこととして扱われ、軽視されてしまいがちな部分であるので、状況や特徴を的確にとらえしっかり記述することで、表現する力を身に付けさせたい。

②「方法」を記述する活動 ～ 解決の方法を明確にする ～

問題を解決する際に、解決の過程を省略し答えのみを記述している生徒を見かけることがある。「答えさえ求まればいい」と考えている生徒は少なくない。生徒は問題解決の過程より結果を重要視しがちであるが、自分の解決方法を振り返り、理解を深めるという意味で、問題を解決する方法や手順を数や式、言葉を用いて的確に記述することをていねいに扱っていきたい。例えば、5分後の線香の長さを求める場合は、「時間 x 分と残りの長さ y mm の関係を表す式 $y = -5x + 120$ を用いて、 x に 5 を代入して 5 分後の線香の長さ y の値を求める」と表したり、「グラフを用いて、 $x = 5$ のときの y の値を読む」と表したりするようにする。

「方法」を記述する場合は、「～を用いて…をする」というように簡潔に記述できるようにしたい。また、同じような形式で解決の見通しを記述することで、問題解決がスムーズに進むことが期待される。生徒が解決の方法を互いに説明し合うことは、他者の考えを知る機会にもなり、その方法を自分自身が他の場面で生かすことにもつながると考える。

③「理由」を記述する活動 ～ 事柄の根拠を明確にする ～

日々の授業の中で、なぜそうなるのかと「理由」を記述する活動は「事実」や「方法」を記述する活動より行われていると感じる。ある事柄が成り立つ「理由」を記述する活動が大事にされるのは、解決した結果だけではなく解決に至る過程を追究する数学の学習の特性であるとともに、この活動が筋道を立てて考える力を育てることと大きく結び付いているからだ。例えば、線香が燃えつきるのが 22 分後である「理由」を記述する場合は、「線香が燃えつきるとするのは長さが 0 mm のことであり $y = 0$ のときである。式 $y = -5x + 120$ において $y = 0$ のとき $x = 24$ となるから、線香が燃えつきるのは 24 分後である」と表すことで、理由から結論まで筋道を通るようにしたい。

「理由」を記述する場合は、「～だから…になる」というように、事柄の根拠を明確に記述できるようにしたい。

上述した 3 つのタイプの記述する活動を学習の中に計画的に取り入れることで、記述することへの抵抗感を減らし、自信がもてるようになる。そして、これらの活動が自分の考えを説明することへの意欲付けになるようにしたい。

(2) 表現したものと対話する活動 ～ 振り返って考えること～

数学の学習はややもすると、答えが出れば終了と思われがちである。特に難易度が高い問題を解決したときにはその傾向が強くなる。解決した喜びに浸る前に、もう一度自分の思考過程を振り返ることを大切にしたい。自分の考えを数学的に表現したものを讀んだり、表現したものに聞いたりして対話するのである。実際に言葉を交わすことはできないが、生徒には数学的に表現したものが自分に対して示していることを読み取るように促すようにする。そうすることで自分の考えの過ちに気付いたり、自分の考えをより明確に理解したり、新たな考えが生まれやすくなる。実際の授業の中では自分との対話を通して、表、式、グラフの互いの関連を読み取ったり、表、式、グラフを互いに関連付

けて一次関数についての理解を深めたり，表，式，グラフをもとに一次関数と事象との結び付きを考えたりと，関数に対する自分の見方や考え方を広げることができるようにしていきたい。

(3) 他者との交流により考えの質を高める活動

「問題を最後まで自分の力で解きたい。」という思いは誰もがもっているが，自分の考えには偏りや限度がある場合もある。自分の考えの根拠を明確にしたり，自分の考えを補足したり，自分の考えを発展させたりするためにも，他者と考えを交流させることは効果的であると考える。そのためには自分の考えを数学的に表現し，それを互いに見たり，読んだり，説明したりする活動が大切になってくる。数学的に表現されたものを用いることで，他者の考えを視覚的にとらえることができ，交流が容易になる。更に互いの考えを説明し合うことにより，自他の考えの理解を深めることができる。活動の形態としてはペアや4人グループで行うようにする。その際の留意点としては，他者の説明をただ聞くだけでなく，自分の考えと比較しながら他者の考えを「理解しよう」と思って聞くように意識させる。また他者の考えのよさを認め，自分の考えや今後の思考活動に生かせるように心掛けさせたい。このような活動を通して互いの考えの質が高まっていくものとする。

(4) 学習を振り返り自己評価をする活動 ～振り返りカードの活用～

本時の学習の中で何を学んだのかを生徒自身が振り返り，自己評価できる時間を授業の最後に設けるようにする。その手立てとして，図4のような単元を通しての振り返りカードを活用し，授業の最後に自分の言葉で記入するようにする。この積み重ねにより，自分の学習成果を記録することができ，単元の学習が終了した際に単元全体を自分自身で振り返り，単元の自己評価を行うことができる。教師は授業ごとにカードを回収し，生徒の理解度や疑問点を見取り，次時の授業に生かすようにする。

これまでの活用状況であるが，大部分の生徒は振り返りカードへの記入に抵抗を感じている様子はなく，「〇〇が理解できた」「△△がよく分からない」など素直な言葉を記入している。ただ，学習内容の理解に関する記入が大部分で，「なぜ…なんだ」とか「～ということとは…がいえ」というような疑問点や分かったことによっては更にどんなことが言えるかなど，発展性のある言葉の記入は少ない。

この改善策として記入事項の中に「疑問に思ったこと」，

数学科 振り返りカード 単元名 ()

年 組 番 氏 名

月 日	授業 態度	理解	挙手 合計	わかったこと，わからないこと，疑問に思ったこと わかったことによって言えること (具体的に記入)

A,B,C,Dを自分で判断して記入

A: しっかり取り組んだ

B: どちらかといえば取り組んだ

C: どちらかといえば取り組めなかった

D: 全く取り組めなかった

A, B, C, Dを自分で判断して記入

A: 理解できた

B: どちらかといえば理解できた

C: どちらかといえば理解できなかった

D: 理解できなかった

素直な思いが書けるようにするとともに，どんなことがわかったか，わかったことによってどんなことがいえるかなど，具体的に書けるようにする。

図 4

「わかったことによって言えること」という言葉を追加し，発展性のある振り返りと言葉の記入を促すようにした。また，記入する時間を十分に確保するとともに，教師側からの意図的な言葉掛けやコメントの記入なども心掛けていきたい。

3 授業の構想

(1) 単元名 「一次関数」 (第2学年)

(2) 単元の目標

- 身の回りにある事象の中から伴って変わる2つの数量の関係を見だし、その関係を表、式、グラフを用いて調べようとする。(数学への関心・意欲・態度)
- 表、式、グラフを互いに関連付けて見たり考えたりすることで、一次関数の特徴をとらえることができる。また、身の回りにある一次関数となる事象を一次関数とみなし考察することができる。(数学的な見方や考え方)
- 一次関数の関係を表、式、グラフで表現することができる。また、身の回りにある事象を表、式、グラフを用いて表現し、一次関数との関連を説明することができる。(数学的な技能)
- 表、式、グラフから一次関数の特徴を理解したり、身の回りにある事象の中に一次関数をどのように用いるのかを理解したりする。(数量や図形などについての知識・理解)

(3) 数学的な表現力を育てるための指導計画(14時間取り扱い)

節	時	ねらい・学習活動	数学的な表現力を育てるための手立て
一次関数	1	ある数量が変化するとき、それに伴って変わる数量を調べ関数の意味を理解する。 身の回りにある伴って変わる数量を調べ、「○は△の関数である」と表すことと、その意味を理解する。	・ある事象が関数になっているとき、「○は△の関数である」と記述するようにする。
	2	身の回りにある事象の中の一次関数の関係にある数量に着目し、一次関数の意味を理解するとともに、一次関数と比例の関係を理解する。 身の回りにある比例の関係を含む新しい関数(一次関数)について考える。	・表や式をもとに比例と一次関数の共通点と相違点を自分の言葉でまとめる。 ・事象を式で表すことで、事象と一次関数が結びつくようにする。
	3	身の回りにある事象の実験を行い、そのデータをもとに、一次関数の x と y の値がどのように変化するかを理解する。また x と y の関係を事象と関連付けて式で表すことができる。 x が変化すると y の値はどのように変化するかを考える。また、 x と y の関係を式で表す。	・実験で得られた値を表で表し、表を横に読んだりしながら、気付いた事実を自分の言葉で記述する。 ・ x と y の関係を式で表し、その式で表せる理由を事象と関連付けて考え、記述する。
	4	変化の割合の意味を知り、一次関数では、変化の割合は一定であることを理解する。 x の値がある大きさだけ増加するときの、 x の値の増加量と y の値の増加量の関係を考える。	・一次関数における変化の割合の特徴を自分の言葉で記述する。 ・前時の実験を通して得られた式の変化の割合は、事象の中でどんなことを意味しているか記述する。
	5	一次関数のグラフは直線になることを理解し、一次関数と比例の関係を理解する。 一次関数のグラフについて考えるとともに、比例のグラフとの関係を考える。	・一次関数のグラフをかくとともに、その特徴を比例のグラフと関連させて自分の言葉で記述する。 ・グラフ上で b の値がもつ意味を、自分の言葉で記述する。
	6	一次関数 $y=ax+b$ のグラフで、 a の値がその直線の傾きを表すことを理解し、一次関数の特徴をまとめる。 一次関数 $y=ax+b$ のグラフで、 a の値がもつ意味について考える。	・変化の割合の意味をグラフから読み取り、記述する。 ・グラフ上で a の値がもつ意味を、自分の言葉で記述する。
	7	一次関数のグラフを、傾きや切片を利用したり、グラフ上にあることがわかっている2点を利用してかくことができる。 一次関数のグラフのかき方を考える。	・傾きと切片を利用して一次関数のグラフをかくとともに、そのようにかいてよい理由と方法を記述し、説明する。
	8	グラフの傾きや切片などに着目して、その直線の式を求めることができる。 座標平面上に直線がかかれているとき、その直線の式を求める方法を考える。	・グラフから傾きや切片を読み取ったり、一次関数であるいろいろな条件を利用したりして、式で表すとともにそのように求めてよい理由と方法を記述し、説明する。
方程式とグラフ	1	二元一次方程式のグラフの意味を理解し、一次関数のグラフとの関係を理解する。 二元一次方程式の解を座標平面上に表すとともに、二元一次方程式のグラフと一次関数のグラフとの関係を考える。	・二元一次方程式のグラフと一次関数のグラフが一致する理由を記述し、説明する。
	2	二元一次方程式を一次関数を表す式とみて、そのグラフをかくことができる。また、二元一次方程式 $ax+by=c$ で $a=0$ のときのグラフをかくことができる。 二元一次方程式のグラフのかき方を考える。方程式 $ax+by=c$ で $a=0$ のときのグラフと、そのかき方を考える。	・二元一次方程式のグラフをかくとともに、その方法を記述し、説明する。 ・二元一次方程式 $ax+by=c$ で $a=0$ のときのグラフをかき、そのグラフになる理由を記述し、説明する。 ・ $b=0$ のときはどうなるのか、予想を記述する。
	3	連立方程式の解は、2つの二元一次方程式のグラフの交点の座標であることを理解する。 2つの二元一次方程式のグラフの交点の意味について考える。	・2つの二元一次方程式のグラフの交点の意味を、連立方程式の解と関連付けて記述する。

3 一次関数の利用	1	身の回りにある問題を解決するとき一次関数が利用できることを理解し、問題を解決することができる。 身の回りにある事象の中から一次関数の関係を見だし、その事象に関する問題を一次関数を利用して解決する。	・グラフで表された身の回りにある事象を、表や式で表す。 ・表、式、グラフと事象を関連付けて考察し、問題を解決する方法を記述する。
	2 (本時)	身の回りにある事象の実験を通して得られた値をもとに、一次関数の関係を見だし、一次関数を利用して問題を解決することができる。 身の回りにある事象を実験し、その事象に関する問題を一次関数を利用して解決する。	・表、式、グラフを用いて身の回りにある事象を表す。 ・表、式、グラフと事象を関連付けて考察し、問題を解決する方法を記述し、グループで説明し合う。
	3	図形(点)の移動の中から一次関数の関係を見だし、一次関数を利用して問題を解決することができる。 図形の移動の中から一次関数の関係を見だし、その事象に関する問題を一次関数を利用して解決する。	・図形(点)が移動する様子を表、式、グラフで表し、その動きをとらえる。 ・表、式、グラフを関連付けて考察し、問題を解決する方法を記述する。

(4) 指導の構想 (本時は3節の2時)

①本時の目標

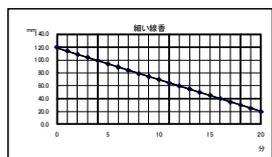
- 実験結果をもとに身の回りにある事象を表、式、グラフで表現し、互いに関連付けることで一次関数の関係を見いだそうとする。 (関心・意欲・態度)
- 表、式、グラフと事象を関連付けて考察し、問題を解決する方法を記述し、説明することができる。 (数学的な技能)

②本時の学習における数学的な表現力を育てるための活動

- ア 実験によって見いだされた「事実」や問題を解決するための「方法」を記述する活動
- イ 数学的に表現したものと自分自身が対話する活動
- ウ 他者との交流により考えの質を高めていく活動
- エ 学習を振り返り自己評価をする活動

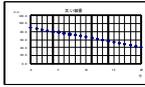
※ ア、イ、ウ、エの活動を行う際の留意点などを指導案の展開の「指導上の留意点」の中に(7)、(イ)、(ウ)、(エ)で示した。

③展開

学習活動・内容	指導上の留意点・評価(◎)・支援(☆)																								
<p>1 学習問題をつかむ</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p><学習問題></p> <p>太さと長さの異なる2本の線香がある。この2本の線香を同時に点火する。2本の線香が同じ長さになるのは何分後か、求める方法を考え、説明しよう。</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: flex-end;">  <div style="margin-left: 10px;">120mm 90mm</div> </div> </div> <p>(1) 実験VTRを視聴し、事象を観察する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・太い線香は、細い線香よりゆっくり燃える。 ・細い線香と太い線香は、どこかで同じ長さになる。 <p>(2) 事象をとらえ、解決する手立てを考える。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・太い線香の燃焼実験のデータを表、式、グラフで表し、それをもとに考える。 ・細い線香の表、式、グラフと重ねてみる。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p><学習課題></p> <p>表やグラフ、式などを使って、2本の線香が同じ長さになるのは何分後か、求める方法を考え、説明しよう。</p> </div>	<p>○ 第1節の第3時に細い線香の燃焼実験を行い、その事象が一次関数であったことを確認する。</p> <p><細い線香について> x: 時間 y: 残った長さ</p> <table border="1" style="font-size: small;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>120.0</td><td>114.5</td><td>109.0</td><td>104.5</td><td>99.0</td><td>94.0</td><td>89.0</td><td>84.0</td><td>79.0</td><td>74.0</td><td>69.5</td> </tr> </table> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;">  <div style="margin-left: 20px;">式 $y = -5x + 120$</div> </div> <p>○ 太さ(直径)がおおよそ2倍であることを伝え、どんな燃え方をするのか想像できるようにしたい。</p> <p>○ VTRは途中で停止し、同じ長さになる時間は数学を使って求めることを伝え、学習意欲を高める。</p> <p>(7) 事象を数学的にとらえるのには、どうすればよいかを問い、事象をとらえる「方法」を考えさせる。</p> <p>○ 実験結果を表、グラフ、式で表せばよいことに気づかせていきたい。</p>	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	y	120.0	114.5	109.0	104.5	99.0	94.0	89.0	84.0	79.0	74.0	69.5
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
y	120.0	114.5	109.0	104.5	99.0	94.0	89.0	84.0	79.0	74.0	69.5														

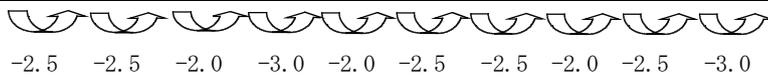
2 太い線香の燃焼実験結果を提示し、表やグラフ、式で表し、整理する。

【実験の記録用紙（焦げ跡のあるグラフ用紙）】



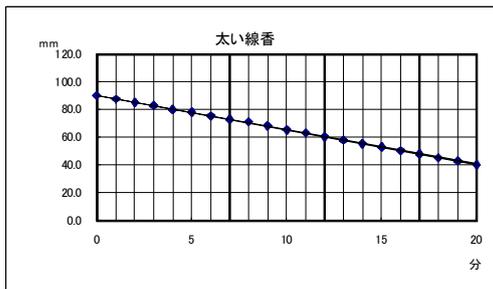
(1) 表に表す

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	90.0	87.5	85.0	83.0	80.0	78.0	75.5	73.0	70.0	68.5	65.5



変化の割合を -2.5 とみる

(2) グラフに表す



(3) 式に表す

$$y = -2.5x + 90$$

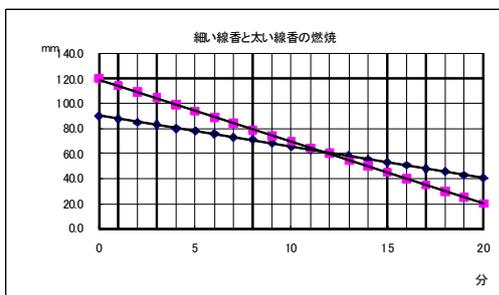
- 伴って変化する2つの数量が何なのかを十分におさえ、太い線香の燃焼も一次関数になることを予想した上で取り組ませたい。
- 実験データを統一するために、教師が事前に実験した結果を提示する。
- 線香が燃焼することで、どんな数量がどのように変化するのかに着目させる。
- 実験では誤差が生じているが、データを理想化して捉えるように助言する。
- (7) (イ) 事象を表、グラフ、式で表すとともに、振り返って考えることで実験によって見いだされた「事実」を自分の言葉で記述させる。

- ◎ 表、グラフ、式を互いに関連付けることで、この事象が一次関数であることを見いだそうとしている。
(観察)
- ☆ 式で表せない生徒には、表を横に見て差が一定であることやグラフの点の並びが直線であることから式が $y=ax+b$ の形であることをつかませる。

3 表や式、グラフを用いて問題を解決する方法を考える。

<予想される考え>

(1) グラフを使って解決する。



細い線香と太い線香のグラフを同じ座標平面上にかき、グラフの交点の y 座標を読めばよい

(2) 式を使って解決する。

$$\begin{cases} y = -2.5x + 90 \\ y = -5x + 120 \end{cases}$$

細い線香と太い線香の式を合わせて連立方程式をつくり、連立方程式を解いて、 y の値を求めればよい

- (7) 問題を解決する「方法」を自分の言葉で記述することを確認する。
- (イ) 解決の「方法」が記述できたら振り返って考え、自分の考えを再確認したり、他の方法を考えたりするように助言する。

(3) 表を使って解決する。

分	0	1	2	3	...	12	...
細	120	115	110	105	...	60	...
太	90	87.5	85	82.5	...	60	...

細い線香と太い線香の時間と残った長さの対応表をつくり、2つの線香の残った長さが一致する値を見つける

4 グループ内で考えを説明し合う。(比較検討)

<予想される考え>

- ・表、式、グラフのどれを使っても問題を解決することができる。(妥当性)
- ・式を使って表の値を求めていくこともできる。(関連性)
- ・グラフだとおおよその値しか読めない。表だと時間がかかる。式を使うとワンポイントで値が分かる。(発展性)

5 全体場でよい考えを紹介する。

6 学習内容を振り返り、本時のまとめをする。

表、式、グラフを互いに関連付けて考えると身の回りにある事象が数学的にとらえられるとともに、未来を予測するなど問題を解決するのに有効である。

(ウ) 自分の考えをただ発表するだけでなく、友達の考えを自分の考えと比較しながら聞いたり、友達の考えのいい所をメモしたり、自分の考えに付け加えたりすることを意識させる。

◎ 表、式、グラフと事象を関連付けて考察し、問題を解決する方法を記述し、説明することができる。(発表、プリント)

☆ 解決の「方法」が記述できない生徒には、2つの線香のグラフをかかせ、同じ長さになるという問題を視覚的に解決できるようにさせたい。

○ 比較検討の場では、表、式、グラフの長所と短所を踏まえた話し合いができるようにする。

(I) 表、式、グラフを互いに関連付けて考えることによさに触れ、互いに関連付けて考えていくことの有効性を振り返りカードに記述できるようにする。

○ VTRの続きを視聴し、実際の結果を確認するとともに、関数を使うと身の回りにある事象の予測ができるということを話し、数学を学ぶよさに触れる。

(5) 授業の分析と考察

① 記述の方法を身に付ける活動について

何のために表現するのか、どのように「事実」、「方法」、「理由」を記述するかが分かるように図5の「記述ポイント」をまとめたシートを作成し、いつでも記述の仕方を確認できるようにノートに添付させた。

本時の学習活動である、問題を解決するための「方法」を記述する活動では、生徒は2つの線香を燃焼させ、長さが同じになる時間を求める方法を、表、式、グラフを使った3つの方法で記述していた。生徒が記述した主なものは次の通りである。

<表を使用>

- ・表を使って、1つ1つ値を求めていく。
- ・表を使って、同じ長さのときの時間を求める。
- ・表を使って、太い方と細い方の値を出して、数が同じになるところを見つける。

<式を使用>

- ・(細い線香と太い線香の) 2つの式を使って、連立方程式にして解く。
- ・(細い線香と太い線香の) 2つの式を組み合わせ、連立方程式にして解いて求める。

<グラフを使用>

- ・(細い線香と太い線香の) 2つのグラフをかいて、交点の座標を読む。

また、問題を解決するために、生徒は表、式、グラフのどれを使用したのかをまとめたものが、次の表1である。

何のために、自分の考えを表す(書く)のだろうか？

- ① **自分が理解するため** ← 書いたものと対話する
友達の書いたものを読む、聴く
- ② **相手(みんな)に理解してもらうため** ← 書いたものを見せる
発表する
- ③ **学習の振り返りをするため** ← 授業の最後に書いたものを見直す
ノート

記述する3つのポイント

☆ 数学の学習では、主に次の3つのことについて自分の考えをしっかりと記述できることを目標にしています。

① 「 事実 」を記述する。～分かっていることをはっきりさせる～ 「～は…である」と記述する。 (例) 直線 $y = 2x - 3$ で、傾きは2、切片は-3である。 (例) 燃やした時間がきまると線香の長さがきまるので、線香の長さは時間の関数である。
② 「 方法 」を記述する。～解決の方法をはっきりさせる～ 「～を用いて…をする」と記述する。 (例) 式 $y = 2x - 3$ を用いて、 $x = 4$ のときの y の値を求める。
③ 「 理由 」を記述する。～ことからの根拠をはっきりさせる～ 「～だから…になる」と記述する。 (例) 直線のグラフと y 軸との交点の座標が $(0, -3)$ だから、この直線の式の切片は-3になる。

図5

式とグラフを使用した生徒が多いことから、「2つの線香の長さが同じになる」ということを、既習内容の「2つの一次関数のグラフの交点」や「連立方程式の解」と関連付けて考えることができたと思

(第2学年*組 *名) (のべ人数)

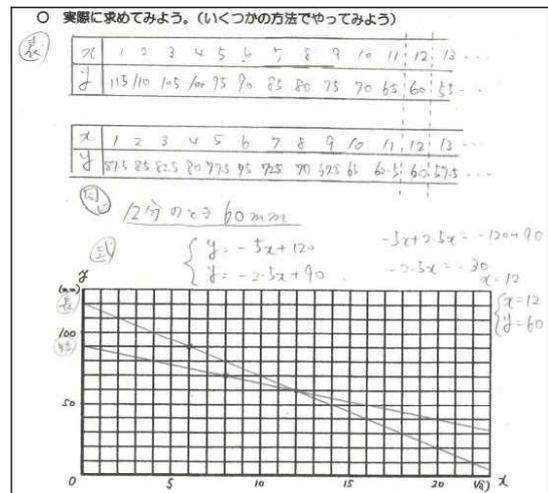
表	式	グラフ	無答
*	*	*	*

表1

えることができる。表を使用した生徒は少ないが、1分あたりに燃焼する長さ(変化の割合)が一定であることに目を付けて、1分ごとの長さを表に記入していけば求められると考えていた。授業の中では、3つの方法とも問題を解決することが可能であることを確認し、1つ1つの考え方を尊重するようにした。無答の生徒には、全体での方法の確認後、自力でできそうな方法を選択させて取り組ませた。

②表現したものと対話する活動について

自力で問題解決できた後、本当にそれでよいのか、振り返って考えることを大切にしたい。単なる見直しをするだけでなく、異なる方法で再度解き直してみるようにした。実際にグラフを使って解決できた生徒が式を使って再度解決し直したり、表を使って解決した生徒が式とグラフを使って再度解決し直したりする場面が見られた。このように解決した生徒が授業の最後に行う自己評価の中で「A(十分理解できた)」と回答していることから、表、式、グラフを互いに関連付けて考えることは、学習問題に対する理解を深めることができるのではないかと考える。



③他者との交流により考えの質を高める活動について

4~5人のグループになり、互いのワークシートを交換して考えを交流させたり、自分の考えを同じグループのメンバーに説明したりする活動を行った。生徒を観察していると、説明を聞きながらうなずいたり、質問したりする姿が見られたことから、他者がどのように考えたのかを知ることは、自分の考えの質を高め、いく上で有効であったと思われる。特に自力で解決することができなかった生徒にとっては最高の支援になったと思われる。

④学習を振り返り自己評価する活動について

学習のまとめとして、表、式、グラフの長所と短所について考えた。表、式、グラフを関連付けて考えることは、互いの短所を補い合うことができること、学習内容の理解を深められることを確認した。最後に実験VTRの続きを視聴し、何分で同じ長さになるのかを確認した。問題解決の結果、同じ長さになるのは12分後ということであったが、実際は13分ほどかかり誤差が1分ほど生じた。生徒の反応は、予想が外れたという見方より、ほぼ正解という見方の方が強かった。

振り返りカードの「理解」についての自己評価は、次のようになった。

A：十分理解できた	*	*	C：どちらかという理解できなかった	*	*
B：どちらかという理解できた	*		D：理解できなかった	*	

(第2学年*組 *名)

また、生徒が記述した「学習の振り返り」としては、次のようなものがあった。

- ・グラフも式も、結びつけて考えると同じ解が出て、おもしろかった。一次関数も難しく考えないでやりたい。
- ・式、表、グラフは、それぞれに求め方の長所・短所があるというのがおもしろい。
- ・同じことを求めるために様々な方法があることが分かった。それぞれに利点がある。
- ・みんなの聞いて、式は難しいかなと思っていたけど、簡単だってことが分かった。
- ・やり方は分かったけど、答えが出ませんでした。
- ・「数学で未来が分かる」ということが分かりました。

これらのことを踏まえると、身の回りにある事象の未来が予測できるなどの関数を学ぶ意義やよさを、生徒は実感を伴って理解することができたと思われる。

Ⅲ 研究のまとめと今後の課題

1 研究のまとめ

数学的な表現力を育てるための学習指導の在り方について、中学校第2学年「一次関数」における数学的活動を通して研究を進めてきた。この研究を始める前まで、「数学的な表現力」は「『数学的な表現』で表す力」というように、言葉そのままの意味でとらえていた。しかし、文献等で研究を進めていくにつれ、表す力だけではなく読んだり伝えたりする力を総合した力であることが分かった。また、数学的な表現力を育てるには個人の力だけではなく他者との交流が重要であることが見えてきた。他者との交流の中には、授業の中で「この表現でみんなは分かるかな？」と他者を意識して自分を振り返ったり、「みんなに分かりやすく説明するにはどうすればいいかな？」と他者を意識して発表を考えたりするなど、自分だけではなく「他者」を意識して活動することも含まれると考える。しかし、他者との交流が円滑に進むためには自分の考えに対する自信や不安が大きく影響する。不安を解消するためにも自分の考えを記述する活動を繰り返し行って記述の仕方を身に付けたり、他者との交流の場をたくさん経験させることが大切であると考えている。

本研究を通して、自分の考えを表現し、互いの考えを説明する数学的活動により、自分の考えの質が高まり、理解が深まっていくことを理論的に確認することができた。そして、生徒の数学的な表現力を育てていくことと、実感を伴って理解することとは大きく結び付いていることに気付いた。

また、関数の指導においては、上述した数学的活動を授業の中に取り入れるとともに、事象を表、式、グラフで表現するだけでなく、それらを互いに関連付けて考えることの大切さや表、式、グラフを用いることにより事象を数学で表現できることのよさを味わわせるような授業を工夫することで、関数における数学的な表現力を育てることができると感じた。

他者に「分かりやすく説明する」という数学的活動は、互いの考えを理解するという意味で、数学以外の世界でも重要なことである。このように考えると、数学の学習の中で行っている活動が、将来の人間形成の一躍を担っていることと結び付いていることが分かる。

2 今後の課題

本研究は短期間であったため、更なる追究を要する次のような課題が残された。

- (1) 「関数」の領域以外でも、数学的な表現力を育てていくための方策は有効であるか。
- (2) 表現力と思考力との関係はどのようになっているのか。
- (3) 数学的な表現力を見取るためには、どのような評価問題が適切か。

以上のような課題を解決するために、今後も研究を続けていきたいと考える。

【引用文献】

- 1) 文部科学省 中学校学習指導要領 2009.3 p.47
- 2) 文部科学省 国立教育政策研究所 平成21年度全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要 2009.8 p.12
- 3) 佐伯胖 「『学び』を問いつづけて－授業改革の原点－」 小学館 2003.8 p.140
- 4) 文部科学省 中学校学習指導要領(平成10年12月)解説－数学編－ 大阪書籍 2004.5一部補訂 p.16
- 5) 文部科学省 中学校学習指導要領解説 数学編 平成20年9月 教育出版 2008.9 p.18
- 6) 上掲書6) p.33
- 7) 教育調査研究所「教育展望 2003年5月号 特集 子どもの自己表現力を育てる 第49巻」大日本印刷 2003.5 pp.4-6
- 8) 根本博 「数学的活動と反省的経験」 東洋館出版社 1999.12 pp.26-28

【参考文献】

- ・ 柘本新一郎 「中学校新数学科『数学的な表現力』を育成する授業モデル」 明治図書 2009.9.
- ・ 平岡忠編著 「最新中学校数学科指導法講座3 新しい視点からの教材研究－数・式、関数」 明治図書 1985.3.
- ・ 「CRECER 中学校数学科教育実践講座 第8巻 関数」 ニチブン 1994.10.
- ・ 根本博 「数学教育の挑戦 数学的な洞察と目標準拠評価」 東洋館出版社 2004.10.
- ・ 文部科学省「中等教育資料 平成20年5月号 特集 言語活動を重視した指導の充実」 ぎょうせい 2008.5.
- ・ 国立教育政策研究所教育課程研究センター「平成21年度全国学力・学習状況調査解説資料 中学校 数学」 2009.4.
- ・ 「新しい算数研究 2006年12月号No.431 特集 関連付ける－算数の学習を豊かにする授業－」 明治図書 2006.12.
- ・ 「教育科学／数学教育 2009年12月号No.626 特集 コミュニケーションが数学授業を支える」 明治図書 2009.12.
- ・ 「現代教育科学 2008年11月号No.626 改訂の核『言葉の力』を検証する」 明治図書 2008.11.
- ・ 長崎栄三編著 「中学校新数学科の授業創り① 豊かな数学の授業を創る」 明治図書 2009.6.
- ・ 長崎栄三編著 「中学校新数学科の授業創り② 新たな数学の授業を創る」 明治図書 2009.6.
- ・ 北尾倫彦/鈴木彬編 「[平成14年坂]新 観点別学習状況の評価基準表 中学校・数学」 図書文化社 2002.5.

<資料>

平成21年度全国学力・学習状況調査[数学B]③

③ 美咲さんは、家の白熱電球が切れたので、環境にやさしいといわれている電球形蛍光灯（以下、「蛍光灯」とします。）にかえようと考えています。

そこで、蛍光灯について調べたところ、次のことが分かりました。

蛍光灯について分かったこと

蛍光灯と白熱電球の比較(ほぼ同じ明るさのもの)

	蛍光灯 (10 W)	白熱電球 (54 W)
◎ 値段が高い	1個の値段	1000円
◎ 電気代が安い	電気代(1000時間)	220円
◎ 寿命が長い	1個の寿命	10000時間

美咲さんは、蛍光灯と白熱電球について、電気代は使用時間にもなって一定の割合で増えるとして、1個の値段と電気代を合計した総費用を比べてみようと思いました。

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) 白熱電球を1000時間使用したときの総費用を求めなさい。

(2) 美咲さんは、蛍光灯を x 時間使用したときの総費用を y 円として、 x と y の関係を、右のようにグラフに表しました。

前ページのグラフ上にある点Aの x 座標の値は1000です。点Aの y 座標の値は、蛍光灯についての何を表していますか。下のAからオまでの中から1つ選びなさい。

ア 1個の値段
イ 1000時間使用したときの電気代
ウ 1000時間使用したときの総費用
エ 使用時間
オ 1個の寿命

(3) 美咲さんとお兄さんは、蛍光灯と白熱電球を同じ時間使用したときの総費用（1個の値段と電気代の合計）を比べています。

お兄さん「1個の値段は蛍光灯の方が高いので、最初のうちは蛍光灯の方が総費用も多いね。」

美咲さん「でも、1000時間だと蛍光灯の方が総費用が少なくていいよ。」

お兄さん「それなら、2つの総費用が等しくなる時間があるね。」

蛍光灯と白熱電球の総費用が等しくなるおおよその時間を求める方法を説明しなさい。ただし、実際にその時間を求める必要はありません。

電球形蛍光灯(左)と白熱電球